



El modelo de Solow: análisis teórico, interpretación económica y contraste de la hipótesis de convergencia*



Xavier Raurich

Profesor Titular del Departament de Teoria Econòmica de la Universitat de Barcelona
xavier.raurich@ub.edu | <http://www.eco.ub.es/~creb/Raurich/Index.htm>



Hector Sala

Profesor Titular del Departament d'Economia Aplicada de la Universitat Autònoma de Barcelona
hector.sala@uab.es | <http://gent.uab.cat/hsala/>

| Fecha presentación: 13/04/2010 | Aceptación: 07/09/2010 | Publicación: 17/12/2010

Resumen

Las asignaturas vinculadas al estudio de la macroeconomía suelen resultar especialmente áridas para los alumnos a causa del elevado aparato analítico necesario para el desarrollo del programa. Por ello, en este artículo proponemos una práctica en la que (i) se contrasta empíricamente la hipótesis de convergencia; y (ii) se discute, utilizando el modelo de Solow y evidencia empírica asociada, una explicación de la no convergencia de algunos países. La finalidad última de esta práctica es facilitar la asimilación del modelo Solow a partir de un proceso de autoaprendizaje que permite al estudiante desarrollar competencias transversales tales como el conocimiento de bases de datos, el manejo de hojas de cálculo, y la organización de la información en forma de tablas y gráficos.

Palabras clave: Modelo de Solow, convergencia condicional, crecimiento económico

Resum

Les assignatures vinculades a l'estudi de la macroeconomia solen resultar especialment àrides per als alumnes a causa de l'elevat aparell analític necessari per al desenvolupament del programa. Per això, en aquest article proposem una pràctica en la que: (i) es contrasta empíricament la hipòtesi de convergència; i (ii) es discuteix, utilitzant el model de Solow i evidència empírica associada, una explicació de la no convergència d'alguns països. La finalitat última d'aquesta pràctica és facilitar l'assimilació del model de Solow a partir d'un procés d'autoaprenentatge que permet a l'estudiant desenvolupar competències transversals tals com el coneixement de bases de dades, la utilització de fulls de càlcul, i l'organització d'informació en forma de taules i gràfics.

Paraules clau: Model de Solow, convergència condicional, creixement econòmic

Abstract

Due to the complex analytical tools required, courses related to macroeconomic analysis are usually found arduous by students. It is in this context that we propose an applied coursework where (i) the convergence hypothesis is empirically tested; and (ii) using Solow's model and associated empirical evidence, the non convergence of some countries is discussed. The ultimate goal of this applied coursework is to facilitate full comprehension of Solow's model by means of a self-learning process leading the students to develop general cross-field skills such as knowledge on databases, use of worksheets, and the organization of information in tables and figures.

Keywords: Solow's model, conditional convergence, economic growth

* Xavier Raurich y Hector Sala agradecen el apoyo financiero recibido por parte del Ministerio de Ciencia e Innovación a partir de los proyectos, respectivamente, ECO2009-06953 y ECO2009-07636. Por su parte, Xavier Raurich agradece la financiación recibida por parte de la Generalitat de Catalunya a partir del proyecto SGR2009-1051.



1. Introducción

El modelo de Solow puede explicarse tanto en el marco de asignaturas troncales como son Macroeconomía Intermedia y Avanzada, o en el contexto de asignaturas optativas como pudiera ser Crecimiento Económico. En cualquiera de los casos, el modelo de Solow es el punto de partida de los modelos de crecimiento económico, es por tanto una parte fundamental de la teoría económica, y debe ser comprendido con todas sus implicaciones. Quizás la implicación que cuesta más de asimilar por parte de los estudiantes es la hipótesis de convergencia, en particular porque no se cumple de una forma global. En este artículo se plantea un trabajo práctico que tiene como objetivo facilitar a los estudiantes la comprensión de los conceptos de convergencia y convergencia condicional. Dado que en este artículo se plantea una versión del modelo de Solow en tiempo continuo, pensamos que el trabajo práctico propuesto está especialmente orientado a estudiantes que cursan una asignatura de Macroeconomía Avanzada. Este trabajo práctico puede ser realizado por los estudiantes de forma individual o en grupo, y el profesor puede evaluarlo como parte del proceso de evaluación continua.

En la Sección 2 de este artículo se presenta de una forma muy breve una versión del modelo de Solow con crecimiento exógeno de la productividad y se define la hipótesis de convergencia. Ello sirve para contextualizar la práctica que se plantea a lo largo de la Sección 3. Dicha práctica consta de tres partes diseñadas con el fin de que un alumno ya familiarizado con el modelo de Solow y con la hipótesis de convergencia pueda aprender, por su propia cuenta, el concepto de convergencia condicional. Una vez trabajados y completados los tres ejercicios, el estudiante habrá asimilado este concepto económico de gran importancia, tanto desde el punto de vista de su relevancia para juzgar la situación relativa de los países en un mundo tan globalizado como el actual, como desde la perspectiva del valor añadido que ofrece el modelo de Solow en la interpretación de esta cuestión.

En la primera parte se pide a los estudiantes que utilicen una base de datos y una hoja de cálculo para responder a una serie de preguntas empíricas relacionadas con el incumplimiento de la hipótesis de convergencia. En la segunda parte se les pide que utilicen las ecuaciones del modelo de Solow, previamente explicadas en clase, para contrastar numéricamente una posible explicación del incumplimiento de la hipótesis de convergencia. En la última parte se plantea una reflexión sobre la hipótesis de convergencia que los estudiantes deben realizar a partir de una argumentación intuitiva y sin utilizar ecuaciones.

Cada una de estas partes tiene finalidades pedagógicas distintas. En concreto, en la primera parte, el estudiante tiene la oportunidad de aplicar las nuevas tecnologías para conseguir datos y utilizar una hoja de cálculo para obtener conclusiones sobre la hipótesis de convergencia. Creemos que al utilizar una base de datos de libre disposición en internet le obliga a: (i) familiarizarse con la base de datos; (ii) identificar las series necesarias (pero conocer también las posibilidades adicionales que ofrece la información disponible y no utilizada en el contexto del presente ejercicio); y (iii) organizar la información seleccionada para llevar a cabo el trabajo. En la segunda parte, se facilita la asimilación del modelo Solow a partir de un proceso de aprendizaje más ameno y vinculado a cuestiones de actualidad. Por último, la tercera parte obliga al estudiante a reflexionar sobre las implicaciones del modelo de Solow (especialmente la convergencia) y le fuerza a expresar dichas reflexiones.

Un importante valor añadido de esta práctica es que permite desarrollar distintas competencias transversales. La primera parte permite desarrollar la capacidad de seleccionar y generar la información necesaria para cada problema, analizarla, y tomar decisiones en relación a la organización del trabajo y la planificación del mismo. La segunda parte desarrolla la capacidad de aprender autónomamente. La tercera parte desarrolla la capacidad de comunicación oral y escrita, al obligar a sintetizar y presentar por escrito la argumentación.

Una vez el modelo de Solow ha sido presentado mediante clases magistrales, esta práctica puede desarrollarse bajo los siguientes parámetros orientativos, que variarán de acuerdo con la asignatura concreta, el nivel del grupo y, sobre todo, el propio criterio del profesor:

- Horas presenciales (de prácticas): 3h.
- Horas no presenciales (de prácticas): 6h.
- Metodología: realización de casos teórico-prácticos dirigidos.

Las horas presenciales podrían distribuirse del siguiente modo: (a) 1 hora inicial para explicar la práctica e introducir al estudiante la base de datos (ver sección 3); (b) dos horas finales en las que se realizaría un balance de las partes 1 y 2, y se prestaría especial atención a las reflexiones realizadas en el marco de la parte 3 (ver sección 3.3).

2. El modelo de Solow

A causa de la dificultad que supone, al menos para gran parte de los estudiantes, el trabajar con ecuaciones, proponemos una explicación del modelo de Solow muy pautada en la que primero se definen todas las variables que serán utilizadas, después se presentan las ecuaciones fundamentales y, a partir de estos ingredientes básicos, se desarrolla el modelo hasta alcanzar la expresión final que explica la dinámica del crecimiento económico. Dado que este es un modelo muy conocido, nos limitamos a explicarlo de forma concisa, mencionando sólo y de forma breve las implicaciones que son de interés para el desarrollo de la práctica que se propone en este trabajo. Para una exposición más detallada del modelo se pueden consultar los trabajos de Barro y Sala-i-Martin (2003), Jones (2000), Sala-i-Martin (2000), y Solow (1956).

En primer lugar, en la Tabla 1 definimos las variables que van a ser objeto de atención en el desarrollo del modelo.

A continuación presentamos las ecuaciones que forman parte del modelo, que agrupamos conceptualmente como *ecuaciones de partida e identidades de Contabilidad Nacional* con el fin de facilitar la comprensión del estudiante.

$Y=Y(t)$	Producción o renta	$K=K(t)$	Stock de capital
$N=N(t)$	Población	$I=I(t)$	Inversión
$S=S(t)$	Ahorro	$C=C(t)$	Consumo
s	Propensión marginal al ahorro	$A=A(t)$	Tecnología
δ	Tasa de depreciación del capital		

Tabla 1. Definición de las variables del modelo

Explicamos que las *ecuaciones de partida* surgen, en primer lugar, de dos de las tres perspectivas (oferta y demanda) bajo las cuáles se interpreta el concepto de producción al estudiar el Flujo Circular de la Renta en asignaturas anteriores. Ello proporciona un punto de referencia a los estudiantes.

Vía oferta, precisamos de una función de producción en la que hay cambio tecnológico y que satisface rendimientos constantes a escala:

$$Y(t) = F[K(t), A(t), N(t)] \quad (1)$$

Vía demanda, consideramos una economía sin gobierno (y, por lo tanto, sin gasto público), y cerrada (y, por lo tanto, sin sector exterior).

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (2)$$

Por otra parte, por definición, la evolución en el tiempo del stock de capital depende de la inversión y está sometido a cierta depreciación. Por ello:

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (3)$$

Estas tres ecuaciones constituyen el primer bloque del modelo. Por otra parte, el modelo de Solow se nutre de un conjunto de *identidades de Contabilidad Nacional*, según las cuáles:

- el ahorro es igual a la inversión: $S(t) = I(t)$,
- lo cual, dada la ecuación (2) de demanda agregada, implica: $S(t) = Y(t) - C(t)$,
- de modo que el ahorro total es una proporción de la producción o renta generada en el país (la parte no consumida) que se supone constante: $S(t) = sY(t)$ donde $s \in (0,1)$,
- así como el consumo total es una proporción de la producción o renta generada en el país (la parte no destinada al ahorro): $C(t) = cY(t)$, donde $c = 1 - s \in (0,1)$

Cruzando las ecuaciones (1) y (2), y utilizando las identidades de Contabilidad Nacional, deducimos que $I(t) = Y(t) - C(t) = S(t) = sF[K(t), A(t)N(t)]$

Por lo tanto, la trayectoria del crecimiento del stock de capital es:

$$\dot{K} = sF[K(t), A(t)N(t)] - \delta K(t) \quad (4)$$

A continuación, expresamos la función de producción en unidades eficientes de trabajo utilizando el supuesto de rendimientos constantes a escala. El objetivo de esta transformación es mejorar la tratabilidad del modelo, ya que expresar las variables en unidades eficientes de trabajo permite que éstas tomen un valor constante en el estado estacionario. Para ello dividimos la función de producción por las unidades eficientes de trabajo:

$$\frac{Y(t)}{A(t)N(t)} = F\left(\frac{K(t)}{A(t)N(t)}, 1\right)$$

para obtener, $y = f(k)$ donde,

$$y = \frac{Y}{AN} \quad y \quad f(k) = F\left(\frac{K}{AN}, 1\right)$$

Por lo tanto, dado que $Y = F(K, N) = ANf(k)$, la ecuación (4) en términos de unidades eficientes de trabajo o forma reducida se expresa como $\dot{K} = sANf(k) - \delta ANk$ o, lo que es equivalente:

$$\frac{\dot{K}}{AN} = sf(k) - \delta k \quad (5)$$

A continuación queremos deshacernos del término $\frac{\dot{K}}{AN}$, sabiendo que $k = \left(\frac{K}{AN}\right)$. Si diferenciamos respecto al tiempo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{\partial\left(\frac{K}{AN}\right)}{\partial t} = \left(\frac{\dot{K}}{AN}\right) = \frac{A\dot{K}N - AN\dot{K} - \dot{A}NK}{(AN)^2} \\ &= \frac{\dot{K}}{AN} - \frac{\dot{N}K}{AN^2} - \frac{\dot{A}K}{AN^2} \end{aligned}$$

Sabiendo que $n = \frac{\dot{N}}{N}$ es la tasa de crecimiento del empleo (o de la población) y que $g = \frac{\dot{A}}{A}$ es la tasa de crecimiento de la tecnología obtenemos $\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AN} - k(n + g)$

que, reordenando términos, proporciona:

$$\frac{\dot{K}}{AN} = \dot{k} + k(n + g) \quad (6)$$

De este modo, de las ecuaciones (5) y (6), obtenemos $\dot{k} + k(n + g) = sf(k) - \delta k$ y generamos:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta + g)k \quad (7)$$

La intuición de esta última expresión es la siguiente: si se produce un incremento en el ritmo de crecimiento de la ocupación (población) Δn entonces para mantener el stock de capital por unidad eficiente de trabajo k invariable es preciso aumentar la inversión. Por lo tanto, n juega el mismo papel que la depreciación de capital y una interpretación paralela explica el papel de g .

En el estado estacionario, el stock de capital por unidad eficiente de trabajo k no cambia en el tiempo, de modo que: $\dot{k} = 0$. En esta situación, de la ecuación (7) se obtiene la siguiente igualdad:

$$sf(k^*) = (n + \delta + g)k^* \quad (8)$$

a la vez que se cumple que

$$y^* = f(k^*)$$

$$c^* = (1 - s)y^*$$

Finalmente, cabe recordar que k , y y c son constantes, mientras que sus contrapartidas en valores absolutos $-K$, Y y C - crecen a una tasa que será igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población, n , y de la tecnología, g . La Figura 1 ofrece una representación del estado estacionario.

A luz de la figura 1, conviene realizar una serie de observaciones:

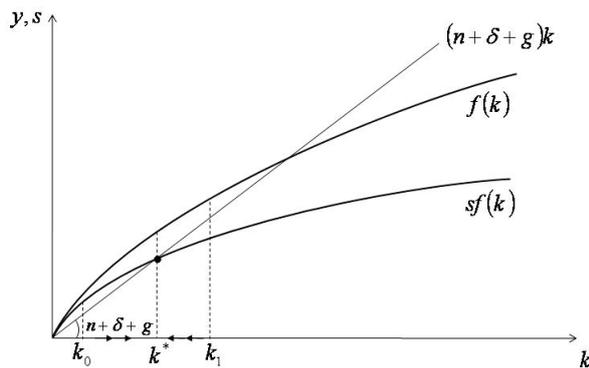


Figura 1. Estado estacionario en el modelo de Solow

- La recta, $(n + \delta + g)k$, tiene pendiente $n + \delta + g$. Es la llamada función de depreciación, ya que n , δ y g actúan erosionando el nivel de stock de capital per cápita.
- k^* indica el nivel de stock de capital por unidades eficientes de trabajo en el estado estacionario: es el punto en el que se cumple la ecuación de equilibrio (8).
- La distancia del eje horizontal hasta la curva $sf(k)$ indica la cantidad de ahorro de la economía. El resto, hasta $f(k)$ corresponde al consumo. En k_0 hay un exceso de ahorro (y un déficit de consumo), mientras que en k_1 hay un exceso de consumo (y un déficit de ahorro). Puede parecer contra-intuitivo, pero la razón es que cuando hay exceso de ahorro el nivel de depreciación es más alto del que habría en equilibrio. Dado que la economía debe asumir más costes (desgaste), el nivel stock de capital neto finalmente alcanzado (a pesar de dedicar más recursos al ahorro) acaba siendo inferior al de equilibrio.

Un aspecto crucial del modelo de Solow es la dinámica de transición hacia el estado estacionario. En efecto, para observar cómo se alcanza el estado estacionario debemos conocer cómo evoluciona el crecimiento del stock de capital. Partimos, por tanto, de la tasa de crecimiento del stock de capital en el tiempo, que de acuerdo con las ecuaciones anteriores puede representarse del siguiente modo:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k) - (n + \delta + g)k}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n + \delta + g) \quad (9)$$

Los dos componentes de esta ecuación están dibujados en la Figura 2 y permiten definir la noción de convergencia β absoluta. El primero, $\frac{sf(k)}{k}$, mide el ahorro por unidad de capital y es decreciente dada la concavidad de la función de producción. El segundo, $(n + \delta + g)$, mide la depreciación por unidad de capital. La distancia entre los dos componentes determina la tasa de crecimiento del capital γ_k .

La Figura 2 indica que cuanto más alejada se encuentra una economía del estado estacionario, más elevada es la tasa de crecimiento de k . En términos de los países en vías de desarrollo, cuanto más lejos están de este estado estacionario más rápido es su crecimiento y más velozmente recuperan distancias con los países desarrollados. Esta es la noción de *convergencia β absoluta*.

El problema es que s , n , g y δ , en tanto que parámetros, tienen unos valores dados que pueden ser distintos entre países. Como consecuencia, cada país converge a su propio estado estacionario, que puede ser muy diferente entre países. Lo que importa para determinar la tasa de crecimiento del-

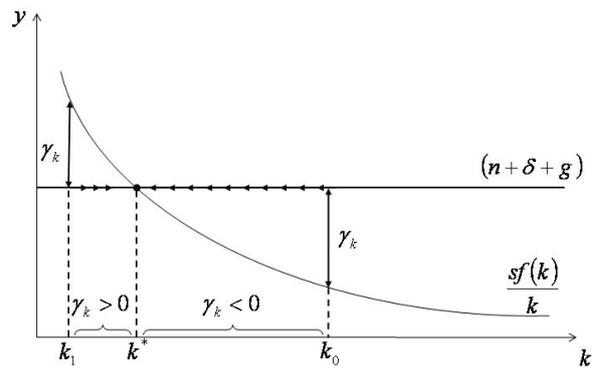


Figura 2. Convergencia β absoluta

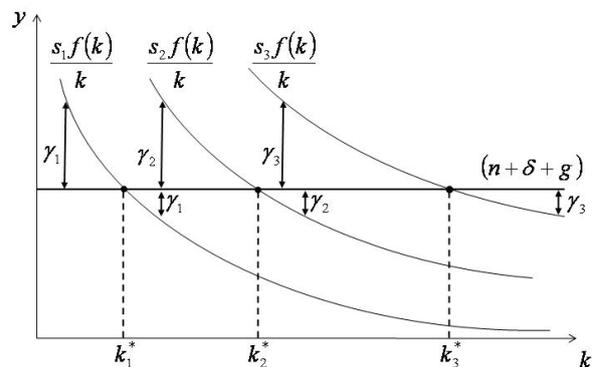


Figura 3. Convergencia β condicional

capital, por lo tanto, es cuán lejos se halla una economía de su propio estado estacionario. Esta es la noción de *convergencia β condicional*, que está representada en la Figura 3. Por lo tanto,

- convergencia β absoluta es aquella que se produce cuando un país en vías de desarrollo crece rápidamente y converge hacia un estado estacionario que es el mismo para todos los países.
- convergencia β condicional es aquella que se produce cuando cada país crece rápidamente porque está alejado de su propio estado estacionario.

3. Actividad práctica

A continuación proponemos una actividad práctica con el fin de contrastar la hipótesis de convergencia empíricamente de una forma sencilla. El objetivo de la misma es, en primer lugar, conseguir que el estudiante dedique un tiempo a reflexionar sobre el concepto de convergencia económica más allá de lo que una simple ecuación puede transmitir. Dicha reflexión es fundamental para la asimilación no sólo del concepto en sí, sino del propio modelo y de los mecanismos que permiten realizar dicha hipótesis. En segundo lugar, el ejercicio tiene varios objetivos metodológicos que, esperamos, puedan contribuir a dotar al estudiante de los instrumentos necesarios para llevar a cabo pequeñas investigaciones empíricas. Entre ellos está, por una parte, el utilizar una base de datos de libre disposición en internet, lo cual obliga a: (i) familiarizarse con la base de datos; (ii) identificar las series necesarias (pero conocer también las posibilidades adicionales que ofrece la información disponible y

no utilizada en el contexto del presente ejercicio); y (iii) organizar la información seleccionada para llevar a cabo el trabajo. Por otra parte, una vez reunidos los *inputs*, está el proceso de realizar el análisis propuesto que implica, no sólo verificar o descartar la hipótesis propuesta, sino también trabajar en su presentación y explicación. Estamos firmemente convencidos de que este tipo de ejercicio empírico permite huir del perfil de trabajo tradicional basado en el resumen y combinación de material de distintas fuentes y alejado, por tanto, de tareas activas en las que hay que recurrir a datos originales y transformarlos para así obtener una respuesta al ejercicio planteado.

Como ya se ha mencionado, la actividad se divide en tres partes; la primera es puramente empírica, la segunda utiliza las ecuaciones del modelo de Solow para encontrar posibles explicaciones a la no convergencia, y la última exige una argumentación escrita que fuerza al estudiante a un proceso de reflexión sobre el concepto de convergencia.

En la sesión presencial de presentación de la práctica debería hacerse hincapié en dos aspectos principales. En primer lugar, debe hacerse explícito que la práctica, en un nivel de grado, no se adentra en el cálculo de las unidades eficientes de trabajo y que se trabaja en términos per cápita. Puede explicarse que para ello necesitaríamos series temporales de la variable tecnología (A), que éstas pueden obtenerse a partir de un cálculo del residuo de Solow, y que dicho cálculo supera los requisitos del presente ejercicio. En segundo lugar, cabe presentar al estudiante la base de datos y proporcionar las herramientas básicas para la selección y obtención de los datos en una hoja de cálculo a partir de la cual podrán ya realizar el análisis.

3.1 Primera parte. Evidencia empírica sobre la hipótesis de no convergencia

Esta parte de la práctica es empírica. En ella, el estudiante se familiariza con la base de datos *Penn World Table*, y con el manejo de una hoja de cálculo con la finalidad de estudiar si se cumple la hipótesis de convergencia. A continuación se presenta el enunciado y la solución del problema, y se proponen alternativas y extensiones al mismo.

Enunciado

Utilizad la base de datos *Penn World Tables 6.3*, disponible en la dirección de internet <http://pwt.econ.upenn.edu>, para responder brevemente a las siguientes preguntas sobre crecimiento económico.

- Calculad la tasa de crecimiento del PIB per cápita promedio en el periodo 1980-2007 en los siguientes países europeos: Alemania, Bélgica, España, Grecia, Francia, Holanda, Irlanda, Italia, Portugal y Reino Unido.
- Mostrad, en un mismo gráfico, la relación entre tasa media de crecimiento y valor del PIB per cápita en el año 1980. A partir del gráfico, argumentad si la evolución de estos países europeos satisface, o no, la hipótesis de convergencia.
- Repetid los apartados a) y b) para los siguientes países: Alemania, Argentina, Bélgica, Bolivia, España, Guatemala, Holanda, Irlanda, México y Perú. ¿Se satisface ahora la hipótesis de convergencia?

Nota: En la base de datos *Penn World Table* encontraréis la información en inglés. La tasa de crecimiento del PIB per cápita se conoce como "Growth rate of Real GDP Chain per capita" y el PIB per cápita se conoce como "Real GDP per capita (Constant Prices: Chain series)"

Respuesta al apartado a)

País	PIB 1980	Tasa de crecimiento medio (1980-2007)
Belgium	20.327,15	2,02
France	19.697,93	1,52
Germany	20.000,38	1,64
Greece	16.939,67	1,79
Ireland	13.699,37	4,01
Italy	18.383,48	1,77
Netherlands	21.029,8	1,83
Portugal	11.059,58	2,40
Spain	14.742,37	2,81
United Kingdom	16.680,52	2,30

Tabla 2. Respuestas al apartado a) del Enunciado 3.1

Respuesta al apartado b)

Según la hipótesis de convergencia, las economías con un PIB per cápita más alto tienen que crecer a un ritmo menor que las que tienen un PIB per cápita menor. De esta manera, las diferencias en PIB per cápita tienden a disminuir con el tiempo hasta que finalmente se produce la convergencia. Una manera sencilla de comprobar ésta hipótesis consiste en mostrar, en un mismo gráfico, las tasas de crecimiento medio y el nivel de PIB per cápita al principio del periodo. La relación entre estas dos variables es la que se muestra en la Figura 4. La relación entre las dos variables representadas permite concluir que en los países europeos se cumple la hipótesis de convergencia ya que son los países que al principio del periodo tenían un PIB per cápita menor los que muestran tasas de crecimiento mayores. Para ilustrar esta relación hemos ajustado una recta a los diferentes puntos. Esta recta claramente tiene una pendiente negativa, cosa que implica que se produce convergencia en tasas de crecimiento.

Respuesta al apartado c)

En este apartado se consideran países que pertenecen a realidades socioeconómicas muy diferentes de modo que la hipótesis de convergencia no tiene por qué ser cierta. De hecho, para los países considerados no se cumple tal y

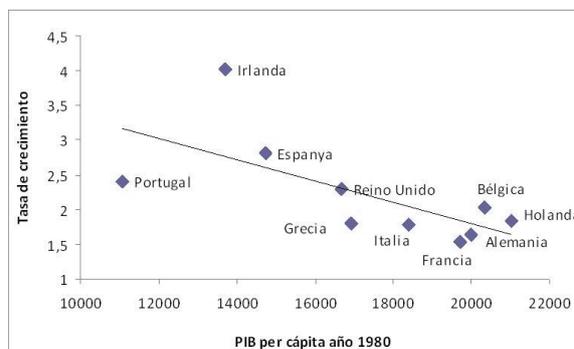


Figura 4: Hipótesis de convergencia I. Fuente: *Penn World Tables 6.3*

País	PIB 1980	Tasa de crecimiento medio (1980-2007)
Argentina	12.116,41	0,93
Belgium	20.327,15	2,02
Germany	20.000,38	1,64
Guatemala	5.890,32	0,23
Ireland	13.699,37	4,01
Mexico	9.287,33	1
Netherlands	21.029,8	1,83
Peru	5.625,33	0,8
Spain	14.742,37	2,81

Tabla 3. Respuestas al apartado c) del Enunciado 3.1

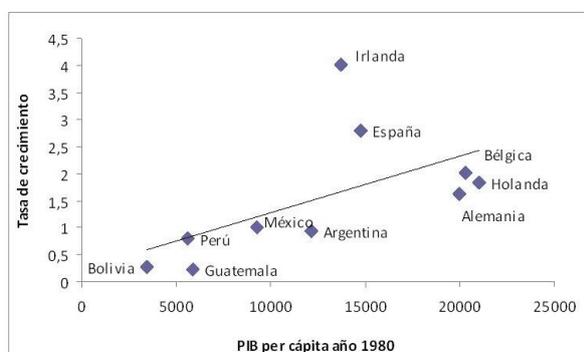


Figura 5: Hipótesis de convergencia II. Fuente: Penn World Tables 6.3

como queda ilustrado en la Figura 5, en el que se muestran nuevamente las tasas de crecimiento y el PIB per cápita en el año de referencia. La relación entre estas dos variables es creciente, cosa que implica que, para estos países y en el periodo considerado, la hipótesis de convergencia no se cumple.

Extensiones

Este tipo de ejercicios empíricos permite múltiples variaciones a partir de la modificación de los países o los periodos considerados. De esta manera se puede plantear el mismo ejercicio en cursos consecutivos sin que los estudiantes puedan obtener directamente la solución a partir de los ejercicios de cursos anteriores. Adicionalmente, el profesor puede plantear preguntas relacionadas con la base de datos orientadas, por ejemplo, a lograr una buena comprensión de las distintas definiciones del PIB per cápita que incluye la base de datos trabajada en la práctica.

3.2. Segunda parte. Solución de ejercicios numéricos

En esta segunda parte, el estudiante debe utilizar las ecuaciones del modelo de Solow, previamente explicadas en clase, para resolver un ejercicio numérico. Este ejercicio permite consolidar los conocimientos teóricos básicos del modelo. Sin embargo, para mantener la motivación del estudiante y para mostrar la utilidad del modelo en la interpretación de la realidad, pensamos que estos ejercicios deben estar relacionados con los datos empíricos de la primera parte. A continuación se presenta el enunciado del ejercicio y su solución, finalizando el apartado con una propuesta de ejercicio alternativo como posible extensión.

Enunciado

Considerad dos países, A y B, con la siguiente función de producción agregada:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

donde Y_t es la producción agregada, y K_t es el stock de capital agregado, que en los dos países se deprecia a una tasa constante e igual a $\delta = 0.03$. Suponed que en los dos la tasa de ahorro es de un 40% y el nivel de progreso tecnológico crece a la tasa $g = 0.02$. La participación del capital en el PIB (intensidad del capital) es $\alpha = 0.5$. La única diferencia entre estos dos países está en la tasa de crecimiento de la población, n . En concreto, en el país A es de un 0,4%, mientras que el país B es de un 2%. Suponed que el PIB per cápita en el año 2009 en el país A es de 200 y el stock de capital per cápita de 1200. En el mismo año, el PIB per cápita en el país B es de 100 y el stock de capital per cápita de 600. Por lo tanto, el país B es más pobre que el país A. Se pide,

a) En el estado estacionario, y para los dos países, calculad el ratio entre stock de capital y PIB, así como la tasa de crecimiento del PIB per cápita.

b) Para los dos países, calculad la tasa de crecimiento del PIB per cápita y el valor del ratio entre stock de capital y PIB en el año 2009. Argumentad si se cumple la hipótesis de convergencia.

c) ¿Creéis que las diferencias en la tasa de crecimiento de la población pueden explicar los resultados del tercer subapartado del ejercicio anterior (3.1)? Para contestar esta pregunta, calculad la tasa de crecimiento de la población media en el periodo 1980-2007 para los 10 países considerados (la serie de población en valores absolutos se encuentra en la misma base de datos utilizada anteriormente "Penn World Table 6.3"; a partir de esta serie podéis calcular la tasa de crecimiento media de la población).

Respuesta al apartado a)

En el modelo de Solow, la tasa de crecimiento del PIB per cápita en el estado estacionario coincide con el crecimiento del progreso tecnológico. Por lo tanto, la tasa de crecimiento del PIB per cápita en el estado estacionario es del 2%. Para encontrar el valor del ratio stock de capital sobre PIB en el estado estacionario es suficiente con aplicar la ecuación (8). Si lo hacéis, encontraréis que dicho valor es de 7,4 en la economía A, y de 5,7 en la economía B.

Respuesta al apartado b)

Dado que conocéis el valor del PIB per cápita y del stock de capital per cápita, sabéis que el ratio entre estas dos variables en el año 2009 es el mismo en las dos economías, e igual a 6. A pesar de que la economía A es más rica que la economía B, el ratio entre stock de capital y PIB en la economía A todavía se encuentra por debajo de su valor de estado estacionario que es de 7,4. Por lo tanto, la economía A acumulará capital en los próximos periodos haciendo que su PIB crezca por encima del 2%. En concreto, utilizando la ecuación (9) y la expresión de la función de producción, encontrareis que la tasa de crecimiento del PIB per cápita en la economía A es del 2,6%.

La economía B en el año 2009 es más pobre, pero la mayor tasa de crecimiento de la población hace que esta economía converja a un valor de estado estacionario del ratio

País	Crecimiento medio de la población 1980-2007
Argentina	0,0128
Belgium	0,002
Bolivia	0,02
Germany	0,002
Guatemala	0,024
Ireland	0,007
Mexico	0,017
Netherland	0,0058
Peru	0,019
Spain	0,0028

Tabla 4. Respuestas al apartado c) del Enunciado 3.2

entre stock de capital y PIB de sólo 5,7. Por lo tanto, en el año 2009 esta economía se encuentra con un ratio de stock de capital sobre PIB por encima del de estado estacionario. En consecuencia, durante los siguientes periodos reducirá el stock de capital y, por lo tanto, el crecimiento de su PIB per cápita de largo plazo será inferior al 2%. En concreto, la tasa de crecimiento del PIB per cápita en la economía B será sólo del 1,83%.

En estas dos economías no se cumple la hipótesis de convergencia, pues la economía con menor PIB per cápita es la que presenta menores tasas de crecimiento. La razón es que las dos economías convergen a estados estacionarios diferentes como consecuencia de las diferencias en las tasas de crecimiento de la población.

Respuesta al apartado c)

La tasa de crecimiento de la población media durante el periodo es del 1,8% en los 5 países latinoamericanos y del 0,39% en los 5 europeos. Observad que las diferencias en las tasas de crecimiento de la población son parecidas a las utilizadas en este problema para explicar la no convergencia. Por lo tanto, las diferencias en las tasas de crecimiento de la población también pueden explicar por qué algunos países pobres crecen menos que otros más ricos.

Extensiones

Existen distintas posibilidades para plantear nuevos ejercicios cuyos resultados puedan ser contrastados empíricamente. Quizás la más obvia y factible es repetir el ejercicio, pero ahora diferenciado los países en su tasa de ahorro. Los apartados a) y b) podrían seguir las mismas líneas que en el ejercicio planteado en este artículo. Para la contrastación empírica, dado que no es posible calcular la tasa de ahorro a partir de los datos de la base de datos *Penn World Table*, se puede sugerir a los estudiantes la utilización de la tasa de inversión en lugar de la tasa de ahorro. Alternativamente, y sólo para los cursos más avanzados, se puede pedir a los estudiantes que obtengan la tasa de ahorro a partir de la información de otras bases de datos (*European Commission Ameco Database*) o que la calculen a partir de la información disponible en otras bases de datos (*OECD Economic Outlook*).

3.3 Tercera parte. Pregunta de reflexión

En esta tercera y última parte se pide al estudiante que reflexione sobre lo que ha aprendido tras completar los dos ejercicios anteriores. Para ello, se le formula una pregunta general que debe responderse por escrito. Adicionalmente, y con el fin de desarrollar competencias básicas como es la expresión oral y la comunicación de resultados e ideas propias en público, sugerimos comentar en clase esta parte de la práctica. Sobre la base del trabajo realizado, el profesor buscará debatir en clase sobre cuestiones vinculadas al distinto grado de desarrollo económico de los países considerados. Como punto de partida, el profesor —o una selección de alumnos— puede presentar los resultados a un nivel muy general. Dado que la prensa recoge con frecuente periodicidad información sobre el crecimiento económico de los países, noticias al respecto de publicación reciente pueden servir de acicate adicional para vincular el modelo de Solow, y sus implicaciones económicas, con la realidad del momento. A este debate y discusión de resultados se dedicaría gran parte de las dos horas presenciales posteriores a la realización de la práctica.

A continuación se presenta el enunciado de la pregunta y una posible respuesta.

Enunciado

Según el modelo de Solow, los países más pobres crecen más rápidamente que los ricos. Este resultado se conoce como hipótesis de convergencia. Ahora bien, los datos muestran que no siempre se cumple este resultado. Explicad por qué no siempre se cumple la hipótesis de convergencia. Para responder a esta cuestión, resulta fundamental haber completado las dos primeras partes de esta práctica.

Respuesta

En el modelo de Solow la tasa de crecimiento del PIB per cápita disminuye a medida que el capital per cápita aumenta y se acerca a su valor de estado estacionario. Cuando los países convergen en un mismo estado estacionario, los países pobres (con menor stock de capital per cápita) se encuentran más lejos del estado estacionario que los países ricos. En este caso, el modelo de Solow implica que los países más ricos tienen menos crecimiento que aquellos otros países más pobres y, por lo tanto, más alejados de su estado estacionario. Esta conclusión es cierta si los países convergen a un mismo estado estacionario, lo cual ocurre sólo cuando los países comparten unas mismas características socioeconómicas (en concreto, mismas tasas de ahorro, de depreciación, y de crecimiento de la población). Cuando los países difieren en algunas de estas características, convergen a estados estacionarios diferentes. En este caso, es perfectamente posible que los países más pobres crezcan menos que los países más ricos. Precisamente, esta posibilidad es la que se ilustra en el problema planteado en esta práctica. La conclusión es que la hipótesis de convergencia sólo se da entre países que tienen características parecidas. De hecho, en la primera parte se muestra que la hipótesis de convergencia es cierta cuando se consideran países europeos (que comparten las mismas características socioeconómicas) y no se verifica cuando se consideran países que pertenecen a realidades socioeconómicas diferentes como las que caracterizan a los países europeos y latinoamericanos.

4. Conclusiones

El tipo de ejercicio empírico que planteamos en esta práctica permite huir del perfil de trabajo tradicional basado en resumir y combinar material de distintas fuentes y alejado, por tanto, de tareas activas en las que hay que recurrir a datos originales y transformarlos para así obtener una respuesta a las cuestiones planteadas.

Nuestra aspiración es que la combinación de elementos teóricos y aplicados permita una aproximación al modelo de Solow rigurosa, pero a la vez atractiva para el estudiante. Esta aproximación tiene la ventaja de que permite desarrollar competencias transversales tan importantes actualmente como el uso de las nuevas tecnologías y la gestión de información. Hoy en día, el desafío para el estudiante no es el acceso a la información, sino la selección y organización de la misma con el fin de dar respuesta a los distintos ejercicios. Adicionalmente, el componente empírico ofrece al profesor múltiples posibilidades, ya que los datos están siempre sometidos a actualización y la selección de países puede variar curso tras curso para centrar la atención en aquellas zonas geográficas o grupos de países que, por razones de actualidad, puedan suscitar un mayor interés por parte de los estudiantes. Finalmente, este tipo de prácticas pueden ser utilizadas en distintos cursos para calificar a los estudiantes mediante un proceso de evaluación continua.

5. Bibliografía

- Barro, Robert; Sala-i-Martin, Xavier. (2003). *Economic Growth*, 2nd Edition, McGraw Hill, New York.
- Jones, Charles. (2000). *Introducción al crecimiento económico*, 1^a edición, Prentice Hall, Madrid.
- Sala-i-Martin, Xavier. (2000). *Apuntes de crecimiento económico*, 2^a edición, Antoni Bosch editor, Barcelona.
- Solow, Robert. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 70 (1), pp. 65-94.

| Cita recomendada de este artículo

Raurich, Xavier y Sala, Hector (2010). El modelo de Solow: análisis teórico, interpretación económica y contraste de la hipótesis de convergencia. @tic. revista d'innovació educativa. (nº 5). URL. Fecha de consulta, dd/mm/aaaa.